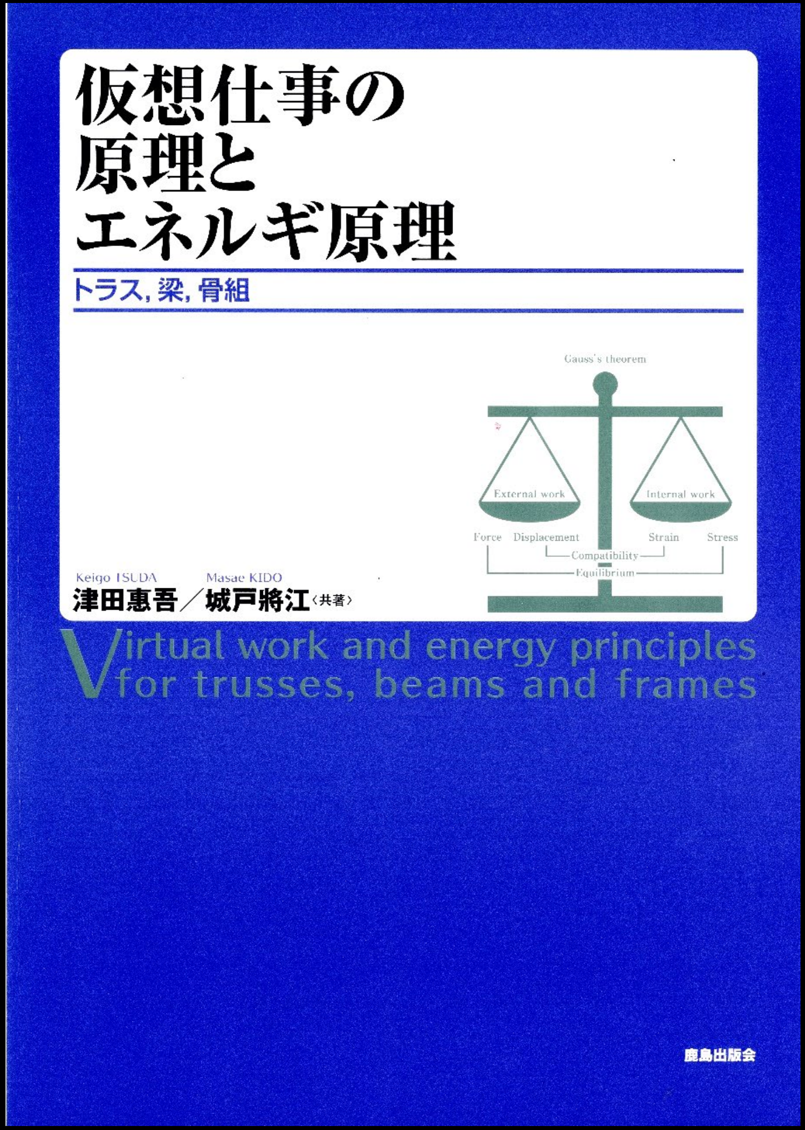
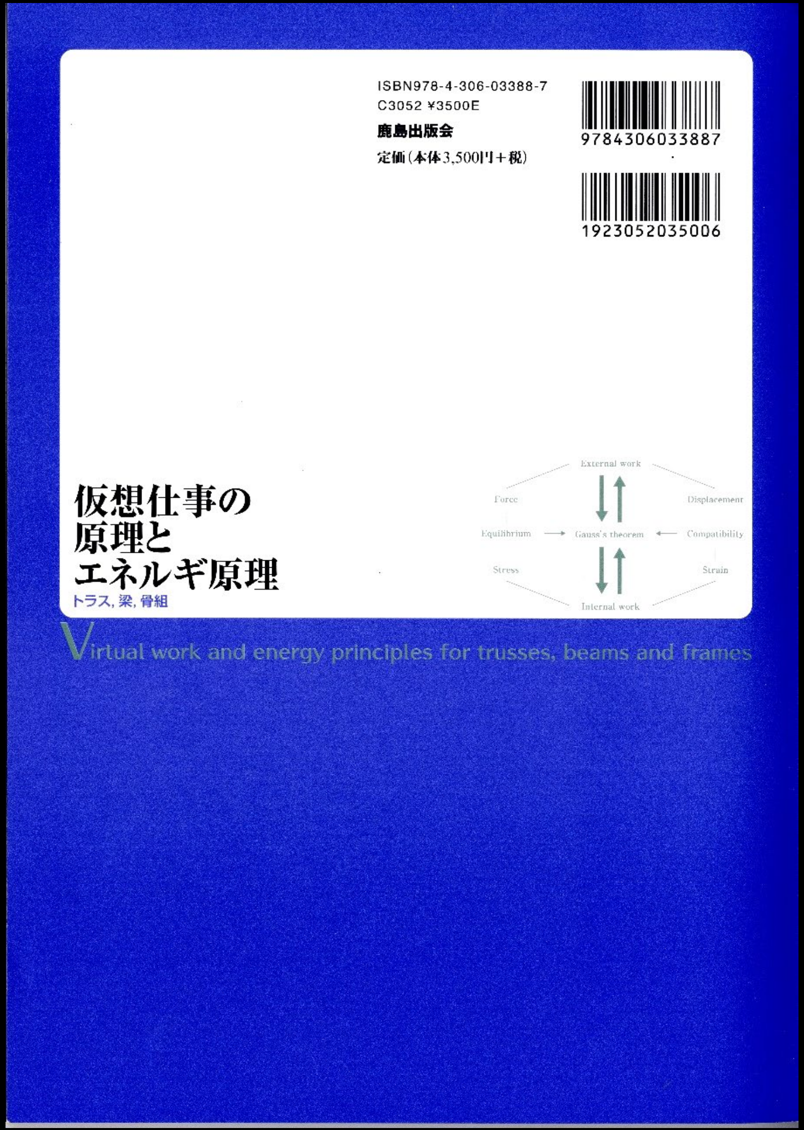
仮想仕事の原理

⑧ 相反定理
例題

城戸將江・津田惠吾 2021.05

仮想仕事の原理とエネルギ原理 トラス，梁，骨組
鹿島出版会　２０１９年9月





仕事の原理・エネルギ原理の概観

カスティリアーノ第1定理

最小ポテンシャルエネルギの原理

⑨, ⑩
仮想仕事の原理

③, ④
ダイバージェンスの定理

単位仮想変位法

⑤, ⑥
単位仮想荷重法

線形の
断面力ーひずみ関係

⑦, ⑧ 相反定理

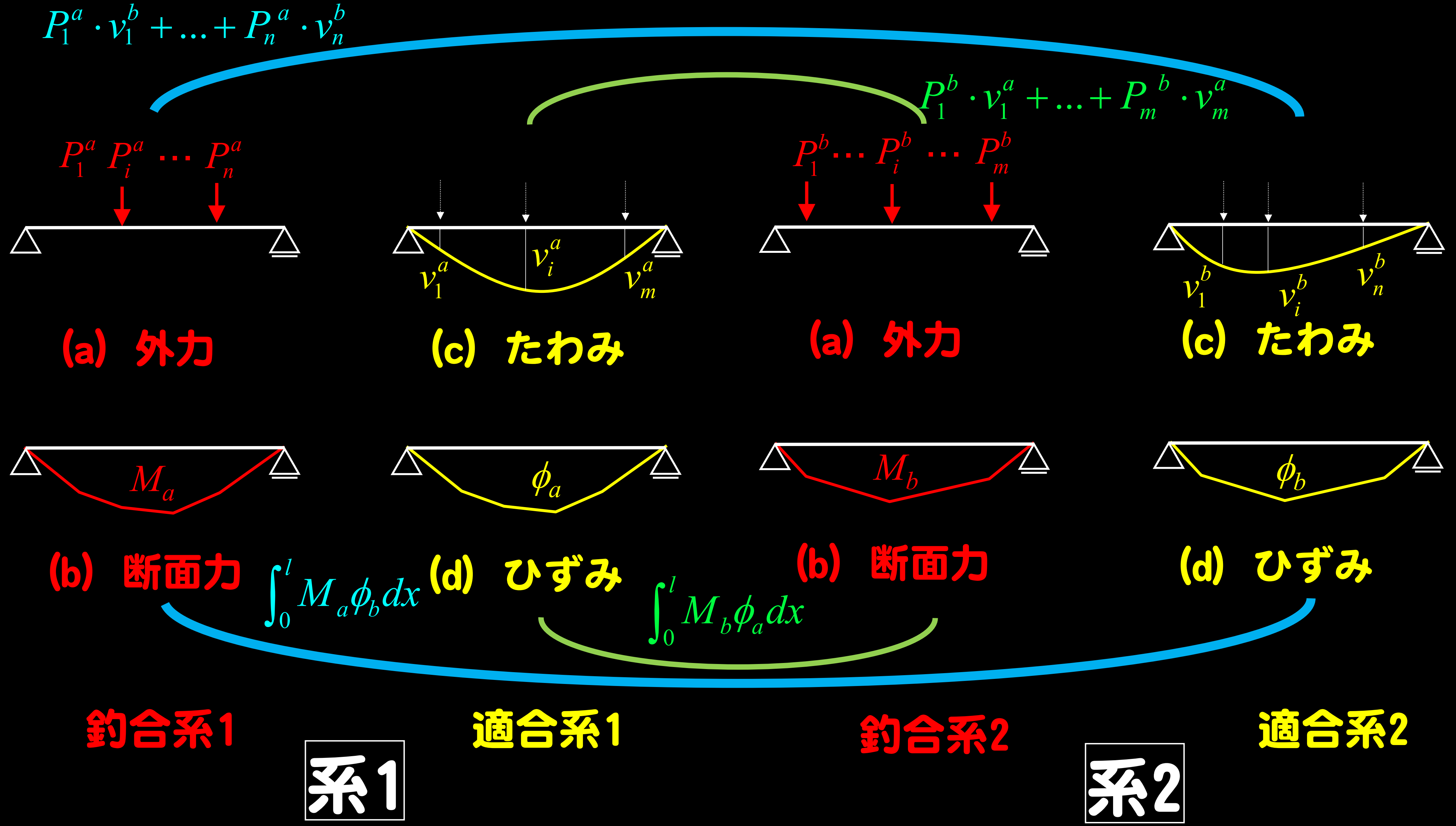
補仮想仕事の原理

最小コンプリメンタリエネルギの原理

カスティリアーノの第2定理

①, ②
構造力学の"構造"

相反定理　1


$P_1^a \cdot v_1^b + \ldots + P_n^a \cdot v_n^b$
$P_1^b \cdot v_1^a + \ldots + P_m^b \cdot v_m^a$
P_1^a P_i^a $\cdots$ P_n^a
v_1^a v_i^a v_m^a
$P_1^b \cdots P_i^b \cdots P_m^b$
v_1^b v_i^b v_n^b
(a)　外力
(c)　たわみ
(a)　外力
(c)　たわみ
M_a
ϕ_a
M_b
ϕ_b
(b)　断面力
$\int_0^l M_a \phi_b dx$
(d)　ひずみ
$\int_0^l M_b \phi_a dx$
(b)　断面力
(d)　ひずみ
釣合系1
適合系1
釣合系2
適合系2
系1
系2

相反定理 2

線形弾性体であれば, $\int_0^l M_a \phi_b dx = \int_0^l M_b \phi_a dx$

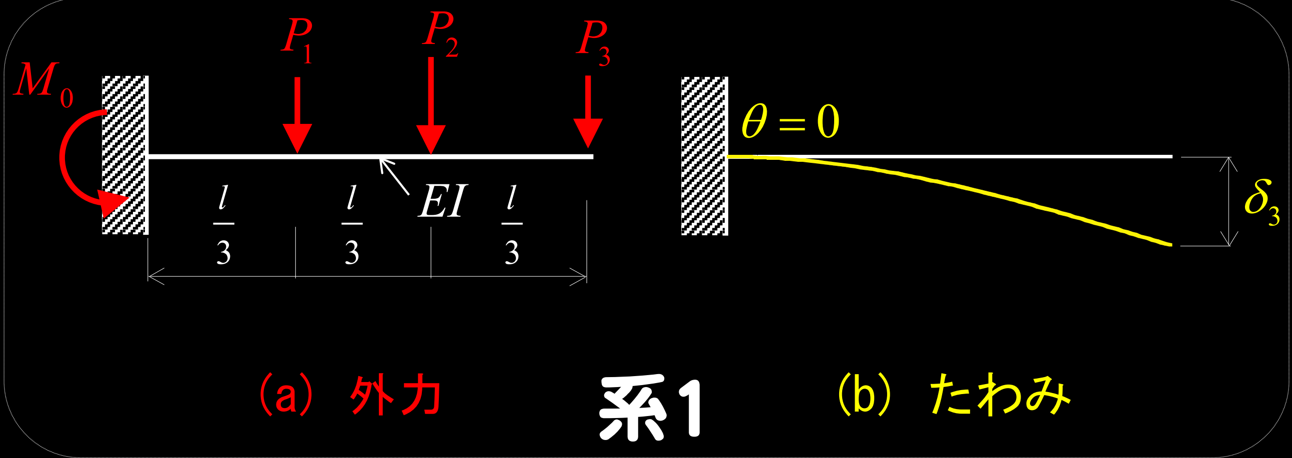
下式の**相反定理**が得られる

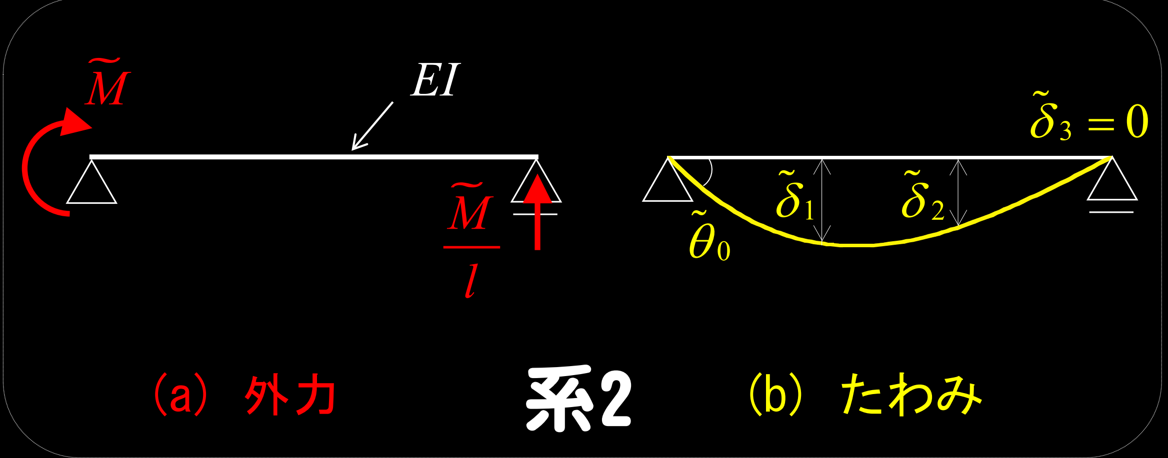
$$\boxed{P_1^a \cdot v_1^b + \ldots + P_n^a \cdot v_n^b = P_1^b \cdot v_1^a + \ldots + P_m^b \cdot v_m^a}$$

系1と系2の幾何学的境界条件は異なっても良い

釣合系の反力が適合系の変位に対して仕事をするときは忘れずに考慮することが必要.

例題1　定理の成立つ確認





相反定理式

$$\boxed{-M_0 \cdot \tilde{\theta}_0 + P_1 \cdot \tilde{\delta}_1 + P_2 \cdot \tilde{\delta}_2 + P_3 \cdot 0 = \widetilde{M} \cdot 0 - \frac{\widetilde{M}}{l} \cdot \delta_3}$$

系1の自由端のたわみδ_3

$$\delta_3 = \left(4P_1 + 14P_2 + 27P_3\right)\frac{l^3}{81EI}$$

系2のたわみ

$$\tilde{\delta}_1 = \frac{5\widetilde{M}l^2}{81EI} \quad \tilde{\delta}_2 = \frac{4\widetilde{M}l^2}{81EI} \quad \tilde{\theta}_0 = \frac{\widetilde{M}l}{3EI}$$

例題1(続)　定理の成立つ確認

相反定理式

$$\boxed{-M_0\cdot\tilde{\theta}_0+P_1\cdot\tilde{\delta}_1+P_2\cdot\tilde{\delta}_2+P_3\cdot 0=\tilde{M}\cdot 0-\frac{\tilde{M}}{l}\cdot\delta_3}$$

左辺= $-\left(P_1\cdot\frac{l}{3}+P_2\cdot\frac{2l}{3}+P_3\cdot l\right)\cdot\frac{\tilde{M}l}{3EI}+P_1\cdot\frac{5\tilde{M}l^2}{81EI}+P_2\cdot\frac{4\tilde{M}l^2}{81EI}$

$=-\left(4P_1+14P_2+27P_3\right)\frac{\tilde{M}l^2}{81EI}$

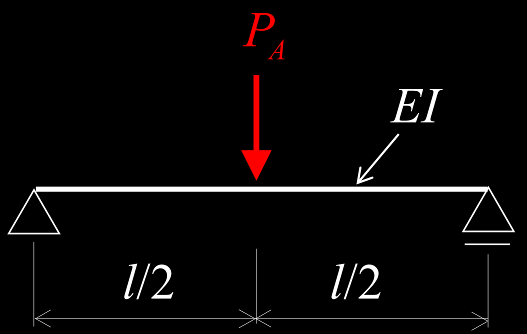
右辺= $-\frac{\tilde{M}}{l}\cdot\delta_3=-\frac{\tilde{M}}{l}\cdot\left(4P_1+14P_2+27P_3\right)\frac{l^3}{81EI}$

$=-\left(4P_1+14P_2+27P_3\right)\frac{\tilde{M}l^2}{81EI}$

左辺=右辺となり，**相反定理**が成立していることが確認できた

例題2

幾何学的境界条件の同じ場合
系2のたわみδ_Bの算定

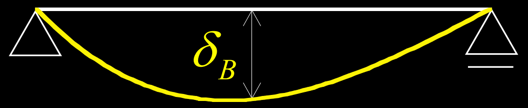


(a) 外力

(b) たわみ

系1

(a) 外力



(b) たわみ

系2

系1の釣合系の外力と系2の適合系のたわみに関して，相反定理式を書き下すと下式となる．

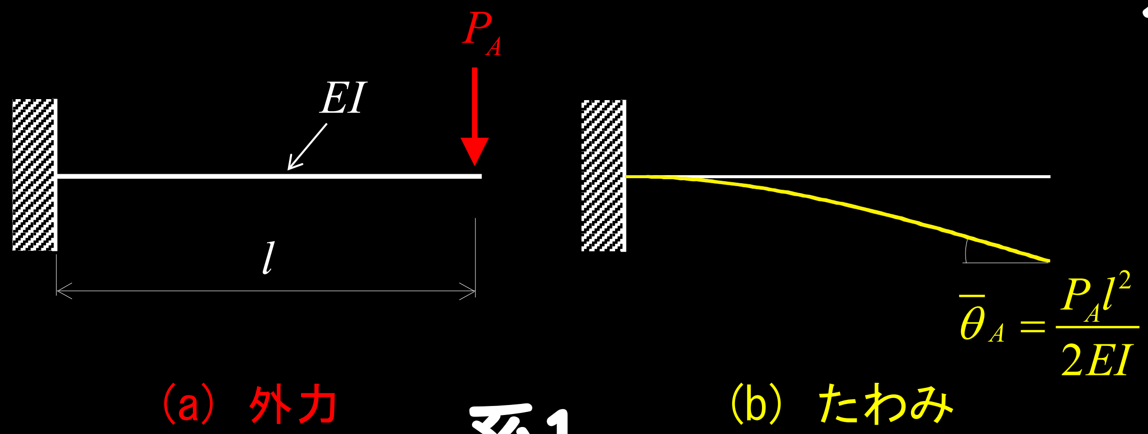
$$P_A \cdot \delta_B = M_B \cdot \bar{\theta}_A$$

従って，系2の適合系において，たわみδ_Bは下式となる．

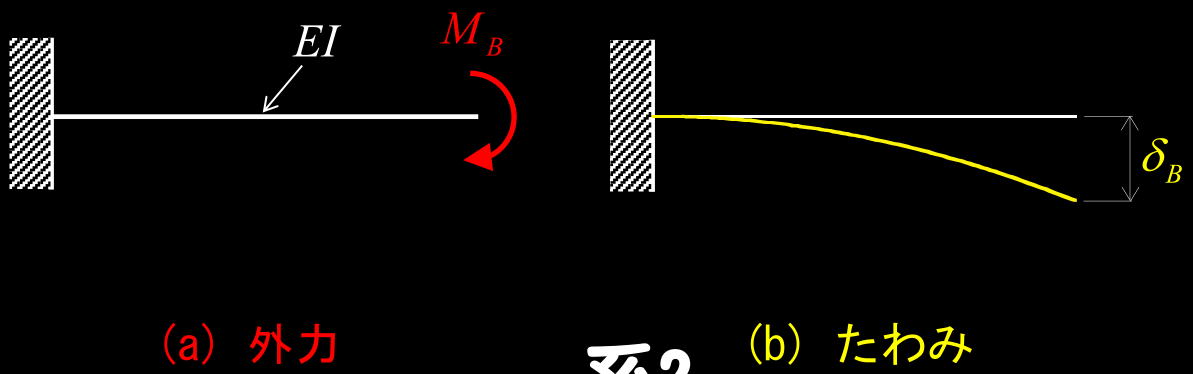
$$P_A \cdot \delta_B = M_B \cdot \frac{P_A l^2}{16EI} \qquad \therefore \ \delta_B = \frac{M_B l^2}{16EI}$$

例題3

幾何学的境界条件の同じ場合
系2のたわみδ_Bの算定



系1



系2

系1の釣合系の外力と系2の適合系のたわみに関して，**相反定理式**を書き下すと下式となる.

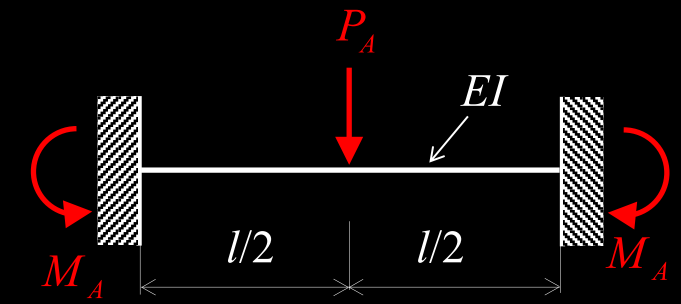
$$P_A \cdot \delta_B = M_B \cdot \bar{\theta}_A = M_B \cdot \frac{P_A l^2}{2EI}$$

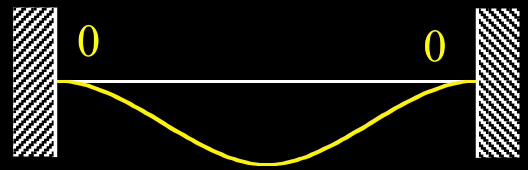
従って，系2の適合系において，たわみδ_Bは下式となる.

$$\delta_B = \frac{M_B l^2}{2EI}$$

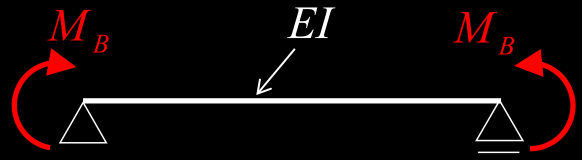
例題4

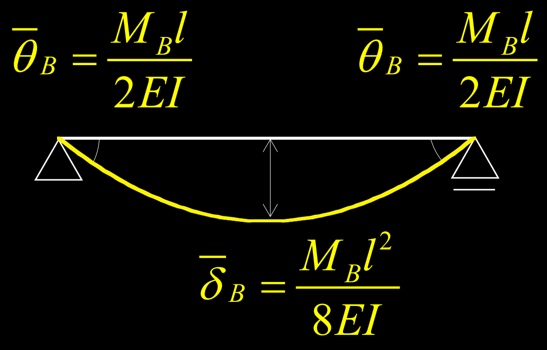
幾何学的境界条件の異なる場合
系1の曲げモーメントM_Aの算定





(a) 外力　　系1　　(b) たわみ





(a) 外力　　系2　　(b) たわみ

系1の釣合系の外力と系2の適合系のたわみに関して，**相反定理式**を書き下すと下式となる．

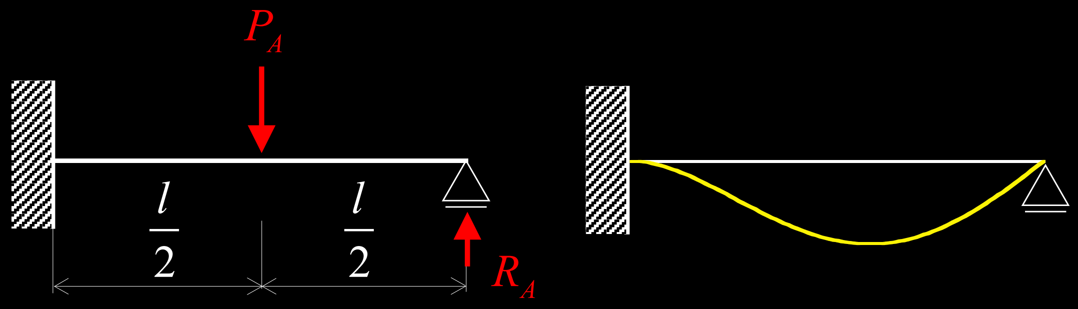
$$P_A\bar{\delta}_B + (-M_A\bar{\theta}_B)\times 2 = M_B \times 0 \times 2 = 0$$

従って，系1の釣合系において，曲げモーメントM_Aは下式となる．

$$P_A\frac{M_B l^2}{8EI} + \left(-M_A\frac{M_B l}{2EI}\right)\times 2 = 0 \qquad \therefore\ M_A = \frac{P_A l}{8}$$

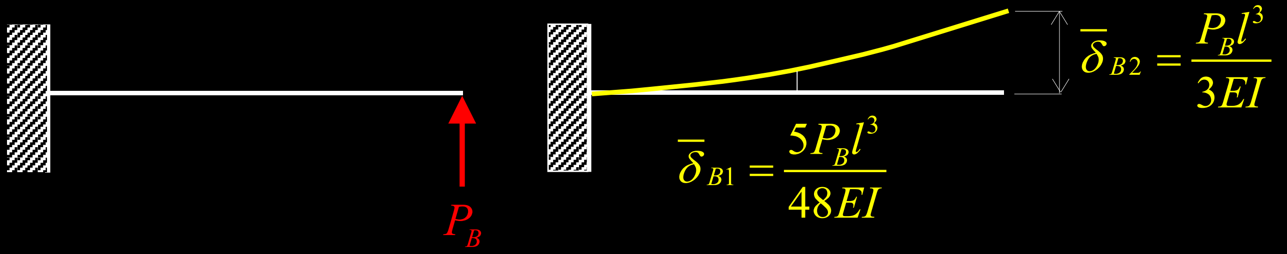
例題5

幾何学的境界条件の異なる場合反力の算定



(a) 外力 (b) たわみ

系1



(c) 外力 (d) たわみ

系2

系1の釣合系の外力と系2の適合系のたわみに関して，相反定理式を書き下すと下式となる．

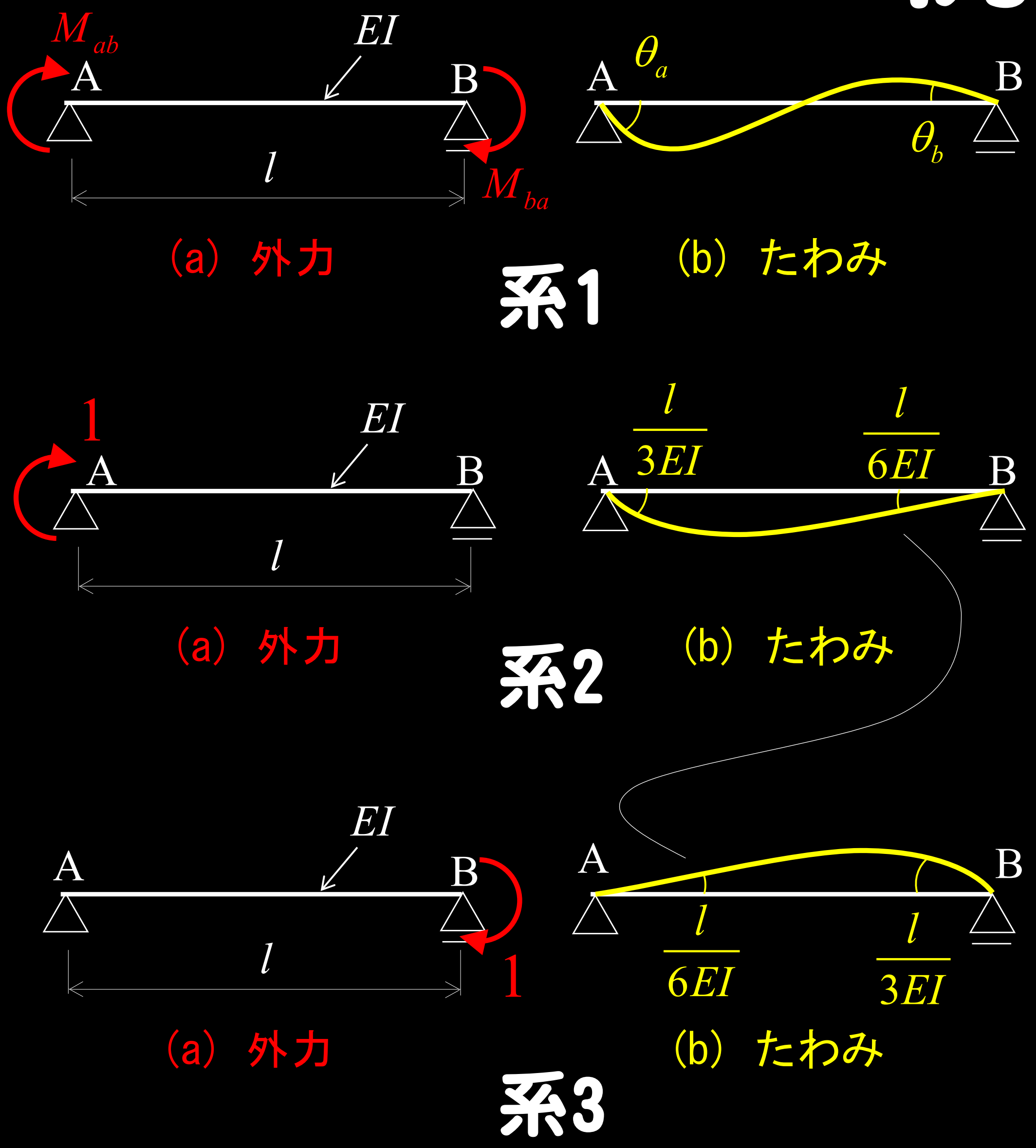
$$-P_A \cdot \bar{\delta}_{B1} + R_A \cdot \bar{\delta}_{B2} = P_B \cdot 0$$

$$\therefore R_A = \frac{\bar{\delta}_{B1}}{\bar{\delta}_{B2}} P_A = \frac{\dfrac{5P_B l^3}{48EI}}{\dfrac{P_B l^3}{3EI}} P_A = \frac{5}{16} P_A$$

従って，系1の釣合系において，反力R_Aは下式となる．

$$R_A = \frac{5}{16} P_A$$

例題6　マックスウェルの定理



系1と系2の相反定理式

$$1\cdot\theta_a = M_{ab}\cdot\frac{l}{3EI} - M_{ba}\cdot\frac{l}{6EI}$$

(重ね合せの原理 → $\theta_a = M_{ab}\cdot\frac{l}{3EI} - M_{ba}\cdot\frac{l}{6EI}$)

系1と系3の相反定理式

$$1\cdot\theta_b = -M_{ab}\cdot\frac{l}{6EI} + M_{ba}\cdot\frac{l}{3EI}$$

例題6（続）　マックスウェルの定理

系1と系2　$1\cdot\theta_a = M_{ab}\dfrac{l}{3EI} - M_{ba}\cdot\dfrac{l}{6EI}$

系1と系3　$1\cdot\theta_b = -M_{ab}\dfrac{l}{6EI} + M_{ba}\cdot\dfrac{l}{3EI}$

マトリックス形式で記述

$$\begin{pmatrix}\theta_a\\ \theta_b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{l}{3EI} & -\dfrac{l}{6EI}\\ -\dfrac{l}{6EI} & \dfrac{l}{3EI}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_{ab}\\ M_{ba}\end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix}M_{ab}\\ M_{ba}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{4EI}{l} & \dfrac{2EI}{l}\\ \dfrac{2EI}{l} & \dfrac{4EI}{l}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_a\\ \theta_b\end{pmatrix}$$

たわみ性マトリックス　　　剛性マトリックス

$$\begin{pmatrix}M_{ab}\\ M_{ba}\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}\theta_a\\ \theta_b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{l}{3EI}\\ -\dfrac{l}{6EI}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}M_{ab}\\ M_{ba}\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}\theta_a\\ \theta_b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\dfrac{l}{6EI}\\ \dfrac{l}{3EI}\end{pmatrix}$$

まとめ

1) 例題1：相反定理が成立つことの確認

2) 例題2：単純ばり → たわみを算定

3) 例題3：片持ちばり → たわみを算定

4) 例題4，5：系1と系2で

幾何学的境界条件が異なる場合の相反定理

→ 反力の算定

5) マックスウェルの定理

次の解説について

⑨ **仮想仕事の原理**を解説します.

質問・要望・意見

よりわかりやすく，役に立つ内容にしたいと考えています．

質問，要望，意見などを，どうぞ宜しくお願い致します．

質問等の送付先は，ホームページに示しています．